

Corso di Fondamenti di TLC a.a. 2010-2011

Trasformata di Fourier – parte 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{w(t)} \underbrace{e^{-j2\pi ft}}_{1} dt = e^0 = 1 = \Delta(f)$$

la verifica del risultato è operata grazie al calcolo della \mathcal{F}^{-1} :

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[\Delta(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df = \delta(t)$$

x3) SINUSOIDE

$$o(t) = A \sin \omega_0 t, \text{ con } \omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}, \text{ per cui:}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt +$$

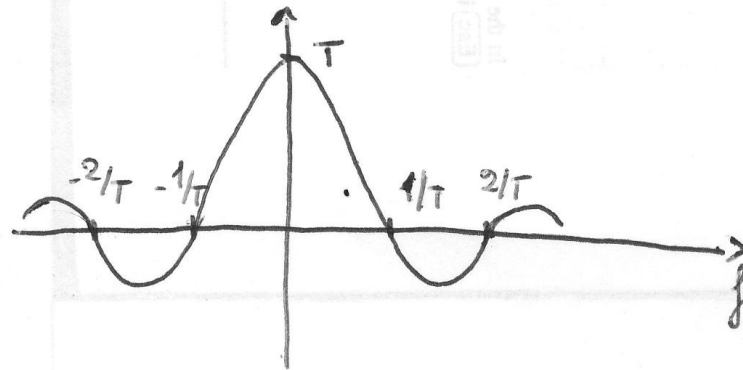
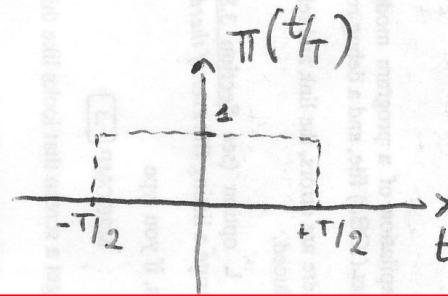
$$-\frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \Rightarrow V(f) = j \frac{A}{2} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$$

utilizzando la trasformata delle δ di Dirac e la proprietà di trasl. frequenz.

4) IMPULSO RETTANGOLARE :

Def

$$\pi\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 & , -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



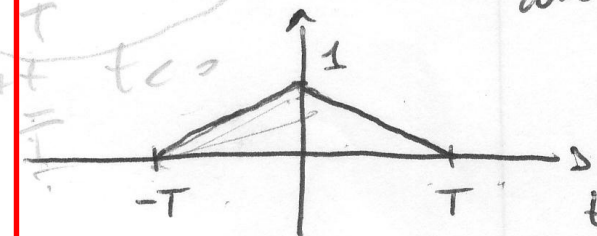
$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{-j\omega} = \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin(\omega T/2) = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T \cdot \text{sinc}(\omega T/2) = T \cdot \text{sinc}(\pi f T)$$

Com $\text{sinc}(x) \triangleq \text{sax}(x) \triangleq \frac{\sin x}{x}$

5) IMPULSO TRIANGOLARE

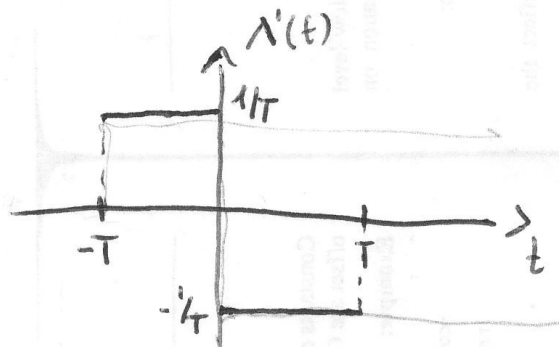
$$g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



Calcolando la derivata si ha:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \begin{cases} -1/T & 0 < t < T \\ 1/T & -T < t < 0 \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$= \frac{1}{T} [u(t+T)] - \frac{2}{T} u(t) + \frac{1}{T} [u(t-T)]$$



derivando ulteriormente:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{1}{T} \delta(t+T) - \frac{2}{T} \delta(t) + \frac{1}{T} \delta(t-T)$$

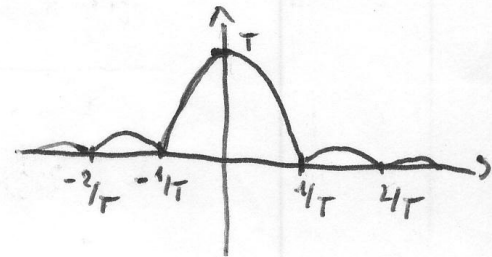
la cui trasformata è:

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{1}{T} e^{j\omega T} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T} e^{-j\omega T} = \frac{1}{T} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})^2 =$$

$= -\frac{4}{T} (\sin \pi f T)^2$ da cui, applicando due volte la proprietà di

integrazione:

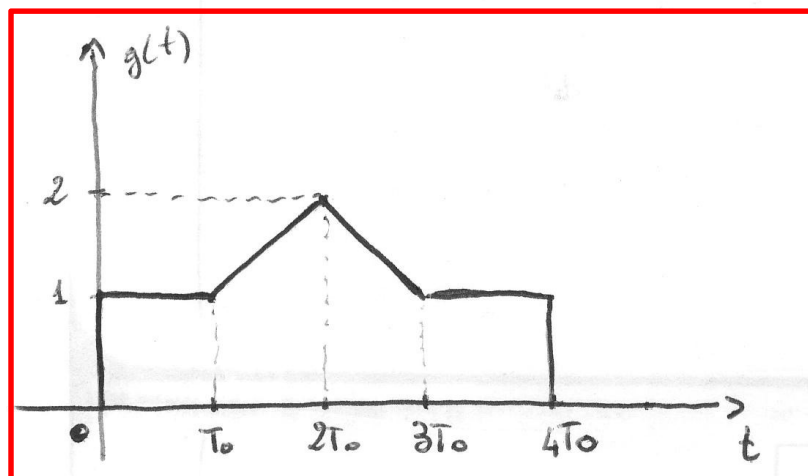
$$g(t) \longleftrightarrow -\frac{4}{T} \frac{(\sin \pi f T)^2}{(j2\pi f)^2} = T \operatorname{sinc}^2(\pi f T)$$



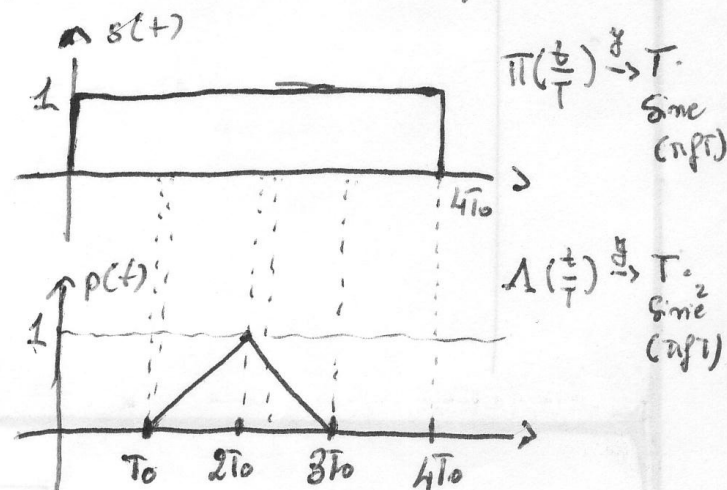
7) ESERCIZIO :

2010

Dato il segnale $g(t)$ come in figura, calcolarne lo spettro :



⇒



Possiamo immaginare $g(t) = s(t) + p(t)$: $s(t)$ è un impulso rettangolare di ampiezza unitaria, di durata $4T_0$ e traslato di $2T_0$, cioè $s(t) = \Pi\left(\frac{t-2T_0}{4T_0}\right)$ mentre $p(t)$ rappresenta un impulso triangolare di ampiezza unitaria, di durata $2T_0$ e traslato di $2T_0$, ovvero $p(t) = \Lambda\left(\frac{t-2T_0}{T_0}\right)$. La trasformata può essere facilmente voluta ricorrendo alle proprietà di linearità e di traslazione temporale, perciò :

$$x(t - T_d) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) e^{-j\omega T_d}$$

$$S(f) = 4T_0 \operatorname{sinc}(4\pi f T_0) e^{-j\omega 2T_0} \quad e \quad P(f) = T_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f T_0) e^{-j\omega 2T_0}$$

per cui :

$$W(f) = \underbrace{[4T_0 \operatorname{sinc}(4\pi f T_0) + T_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f T_0)]}_{\text{}} e^{-j\underbrace{4\pi f T_0}_{\text{fase}}}$$

"
 spettro delle ampiezze

```
%in Hertz (Hz)
```

```
fsample=44.1e3;
```

```
durata = 20;
```

```
numCampioni=durata*fsample;
```

```
%lettura da file (estrazione di numCampioni dal file audio)
```

```
xs=wavread('ondasinK300700Hz.wav',numCampioni);
```

```
%da stereo otteniamo il mono (sx channel)
```

```
%xms=(x(:,1)); %remmato perchè è già segnale monofonico
```

```
xms=xs;
```

```
%fft length
```

```
fftlength=2^(nextpow2(numCampioni/30));
```

```
X=(fft(xms,fftlength));
```

```
%X=(fft(xms,fftlength));
```

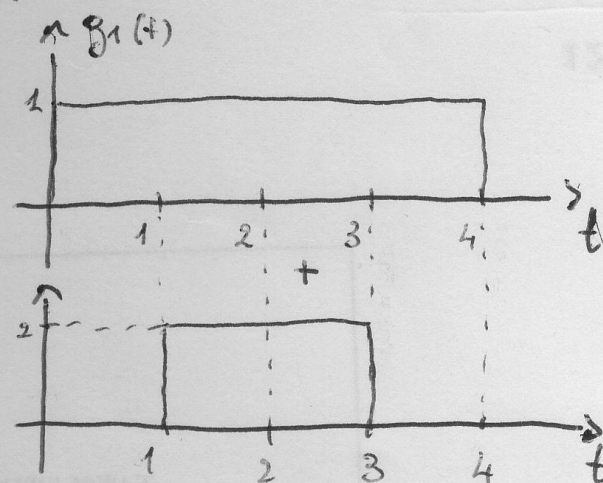
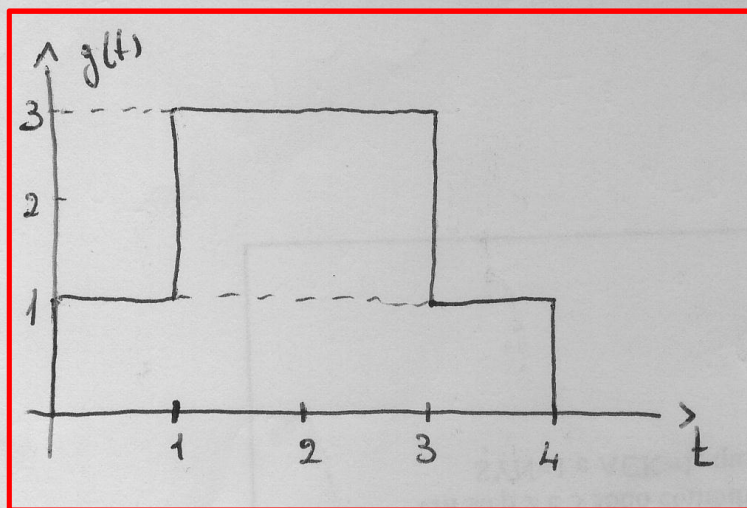
```
X1=[X(1:fftlength/2) X(fftlength/2+1:fftlength)];
```

```
%plot(abs(X1));
```

```
plot(abs(X1(:,1)));
```


ESEMPIO :

Volere la TF della funzione $g(t)$ rappresentato :



$$g_1(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

$\downarrow \mathcal{F}$

$$G_1(f) = 4 \operatorname{sinc}(\pi f 4) e^{-j\omega 2}$$

$$g_2(t) = 2 \Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

$\downarrow \mathcal{F}$

$$G_2(f) = 2 \cdot 2 \operatorname{sinc}(\pi f 2) e^{-j\omega 2}$$

$$G(f) = G_1(f) + G_2(f) \Rightarrow G(f) = 4 [\operatorname{sinc}(4\pi f) + \operatorname{sinc}(2\pi f)] e^{-j4\pi f}$$

ESEMPI 10: Dato il segnale $g(t)$ con TF: $G(f) = \frac{j2\pi f}{1+j2\pi f}$, trovare $X(f)$ per i seguenti segnali:

a) $x(t) = g(2t+2)$: si usa la proprietà di traslazione temporale e di cambiamento di scala: $g(t-T_d) \rightarrow G(f)e^{-j2\pi f T_d}$ e $g(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} G(f/a)$, per cui: $X(f) = \frac{1}{2} \frac{j\pi f}{1+j\pi f} \cdot e^{+j\frac{4\pi f}{2}}$.

b) $x(t) = e^{2\pi j t} g(t-1)$: si usa la proprietà di traslazione in frequenza: $g(t)e^{j2\pi f_c t} \leftrightarrow G(f-f_c)$ con $f_c=1$ nel caso b); $X(f) = \frac{j2\pi(f-1)}{1+j2\pi(f-1)}$.

c) $x(t) = 2 \frac{dg(t)}{dt}$: ci serve la proprietà di derivazione: $d^m g(t)/dt \rightarrow G(f)(j2\pi f)^m$

$$X(f) = 2 \cdot \frac{j2\pi f}{1+j2\pi f} \cdot 2\pi j f = -2 \frac{4\pi^2 f^2}{1+j2\pi f} = -\frac{8\pi^2 f^2}{1+j2\pi f}$$